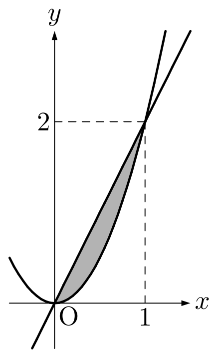
3章　重積分

§1　2重積分　(p.73〜p.74)

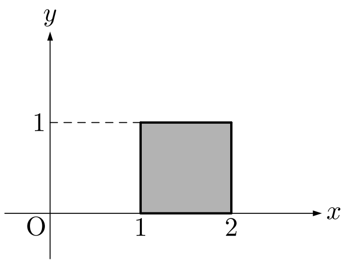
練習問題 1-A

1. (1)



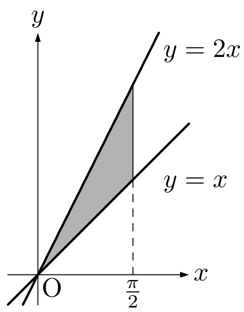
$$与式 = \int_0^1 \left\{ \int_{2x^2}^{2x} (3y^2 - xy)\,dy \right\} dx$$
$$= \int_0^1 \left[y^3 - \frac{x}{2}y^2 \right]_{2x^2}^{2x} dx$$
$$= \int_0^1 \left\{ \left(8x^3 - \frac{x}{2}\cdot 4x^2\right) - \left(8x^6 - \frac{x}{2}\cdot 4x^4\right) \right\} dx$$
$$= \int_0^1 (8x^3 - 2x^3 - 8x^6 + 2x^5)\,dx$$
$$= \int_0^1 (-8x^6 + 2x^5 + 6x^3)\,dx$$
$$= \left[-\frac{8}{7}x^7 + \frac{1}{3}x^6 + \frac{3}{2}x^4 \right]_0^1$$
$$= -\frac{8}{7} + \frac{1}{3} + \frac{3}{2}$$
$$= \frac{-48+14+63}{42} = \boldsymbol{\frac{29}{42}}$$

(2)



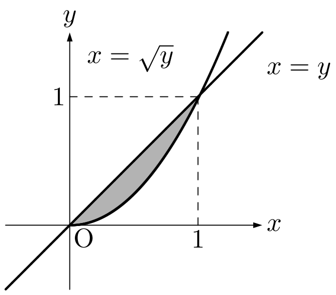
$$与式 = \int_1^2 \left\{ \int_0^1 \frac{x}{(x+y)^2}\,dy \right\} dx$$
$$= \int_1^2 \left[-\frac{x}{x+y} \right]_0^1 dx$$
$$= \int_1^2 \left\{ \left(-\frac{x}{x+1}\right) - \left(-\frac{x}{x+0}\right) \right\} dx$$
$$= \int_1^2 \left(-\frac{x}{x+1} + 1 \right) dx$$
$$= \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx$$
$$= \int_1^2 \frac{(x+1)'}{x+1}\,dx$$
$$= \Big[\log|x+1| \Big]_1^2$$
$$= \log 3 - \log 2 = \boldsymbol{\log\frac{3}{2}}$$

(3)



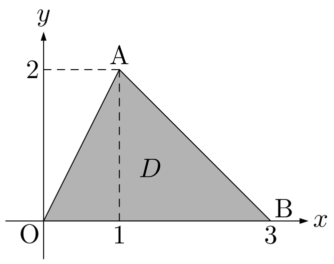
$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_x^{2x} \sin(2x+y)\,dy \right\} dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[-\cos(2x+y) \Big]_x^{2x} dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 4x + \cos 3x)\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\frac{1}{4}\sin 2\pi + \frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}\pi - 0$$
$$= -\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot(-1) = \boldsymbol{-\frac{1}{3}}$$

（4）



$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^1 \left\{ \int_y^{\sqrt{y}} x^2\,dx \right\} dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_y^{\sqrt{y}} dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \{(\sqrt{y})^3 - y^3\}\,dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 (y^{\frac{3}{2}} - y^3)\,dy \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}y^4 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{8-5}{20} = \mathbf{\frac{1}{20}}
\end{aligned}
$$

2. 下の図のように，頂点を定める．



直線 OA の式は，$y=2x$ であるから，$x=\dfrac{1}{2}y$

直線 AB の式は, $y=-x+3$ であるから, $x=-y+3$

よって，領域 D は，次の不等式によって表すことができる．

$0 \leqq y \leqq 2,\quad \dfrac{1}{2}y \leqq x \leqq -y+3$

したがって

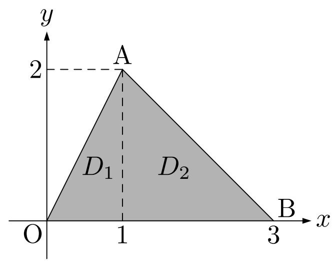
$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^2 \left\{ \int_{\frac{1}{2}y}^{-y+3} y^2\,dx \right\} dy \\
&= \int_0^2 \Big[y^2x \Big]_{\frac{1}{2}y}^{-y+3} dy \\
&= \int_0^2 \left\{ y^2(-y+3) - y^2\cdot\frac{1}{2}y \right\} dy \\
&= \int_0^2 \left\{ -\frac{3}{2}y^3 + 3y^2 \right\} dy \\
&= \left[-\frac{3}{8}y^4 + y^3 \right]_0^2 \\
&= -\frac{3}{8}\cdot 2^4 + 2^3 \\
&= -6+8 = \mathbf{2}
\end{aligned}
$$

〔別解〕

図のように，領域 D を 2 つの領域 D_1，D_2 に分けると

$D_1 = \{\,(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2x\}$

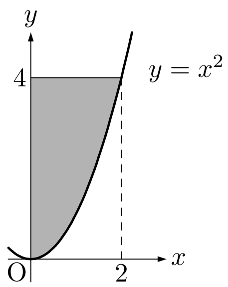
$D_2 = \{\,(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq -x+3\}$



よって

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \iint_{D_1} y^2\,dxdy + \iint_{D_2} y^2\,dxdy \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2x} y^2\,dy \right\} dx \\
&\qquad + \int_1^3 \left\{ \int_0^{3-x} y^2\,dy \right\} dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}y^3 \right]_0^{2x} dx + \int_1^3 \left[\frac{1}{3}y^3 \right]_0^{3-x} dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 (2x)^3\,dx + \frac{1}{3}\int_1^3 (3-x)^3\,dx \\
&= \frac{8}{3}\left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}(3-x)^4 \right]_1^3 \\
&= \frac{2}{3}(1-0) - \frac{1}{12}(0-2^4) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = \mathbf{2}
\end{aligned}
$$

3. （1） 領域を図示すると



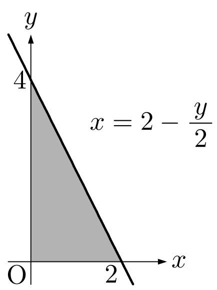
$y=x^2$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ より，$x=\sqrt{y}$ であるから，領域は次の不等式によって表すことができる．

$0 \leqq y \leqq 4,\ \ 0 \leqq x \leqq \sqrt{y}$

よって

$$\text{与式} = \boldsymbol{\int_0^4 \left\{ \int_0^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\,dx \right\} dy}$$

（2）領域を図示すると



$x=2-\dfrac{y}{2}$ より，$y=-2x+4$ であるから，領域は次の不等式によって表すことができる．

$0 \leqq x \leqq 2,\ \ 0 \leqq y \leqq -2x+4$

よって

$$\text{与式} = \boldsymbol{\int_0^2 \left\{ \int_0^{-2x+4} f(x,\ y)\,dy \right\} dx}$$

4. 曲面と $z=0$ との交線は，$0=\sqrt{xy}$ より，$x=0$ または，$y=0$ であるから，領域は，$0 \leqq x \leqq 2,\ \ 0 \leqq y \leqq 3$ である．

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^2 \left\{ \int_0^3 \sqrt{xy}\,dx \right\} dy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{1}{y} \cdot \frac{2}{3} xy\sqrt{xy} \right]_0^3 dy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{2}{3} x\sqrt{xy} \right]_0^3 dy \\
&= \int_0^2 2\sqrt{3y}\,dy \\
&= 2\left[\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} 3y\sqrt{3y} \right]_0^2 \\
&= 2\left(\frac{4}{3}\sqrt{6} \right) = \boldsymbol{\frac{8\sqrt{6}}{3}}
\end{aligned}$$

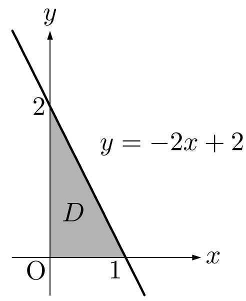
5.
$$\begin{aligned}
z &= \left(x+\frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2 \\
&= \left(x+\frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

よって，曲面は，xy 平面の上側にある．

また，領域 D は

$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq -2x+2$

で表されるから，求める立体の体積を V とすると



$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (x^2+xy+y^2)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2-2x} (x^2+xy+y^2)\,dy \right\} dx \\
&= \int_0^1 \left[x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_0^{2-2x} dx \\
&= \int_0^1 \left\{ x^2(2-2x) + \frac{1}{2}x(2-2x)^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{3}(2-2x)^3 \right\} dx \\
&= \int_0^1 \left\{ 2x^2(1-x) + 4 \cdot \frac{1}{2}x(1-x)^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + 8 \cdot \frac{1}{3}(1-x)^3 \right\} dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \{6x^2(1-x) + 6x(1-x)^2 \\
&\qquad\qquad + 8(1-x)^3\}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \{6x^2 - 6x^3 + 6x - 12x^2 + 6x^3 \\
&\qquad\qquad + 8(1-x)^3\}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \{-6x^2 + 6x + 8(1-x)^3\}\,dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \{-3x^2 + 3x + 4(1-x)^3\}\,dx \\
&= \frac{2}{3}\left[-x^2 - \frac{3}{2}x^2 + (1-x)^4 \right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}\left\{ -1 + \frac{3}{2} - (-1) \right\} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \boldsymbol{1}
\end{aligned}$$

練習問題 1-B

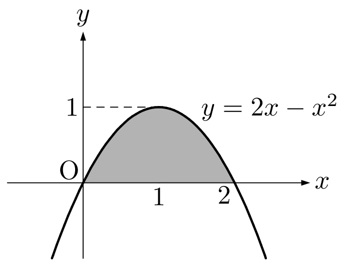
1. （1） $y = -x^2 + 2x$

$= -(x^2 - 2x)$

$= -(x-1)^2 + 1$

また，$2x - x^2 = 0$ より，$x(2-x) = 0$ であるから，曲線と x 軸との交点の x 座標は，$x = 0,\ 2$

領域を図示すると



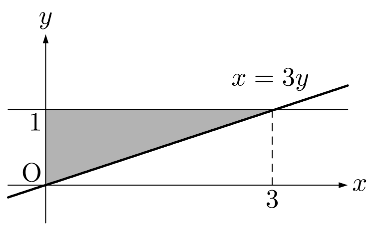
この領域は次の不等式によって表すことができる．

$0 \leqq x \leqq 2,\quad 0 \leqq y \leqq 2x - x^2$

よって

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^2 \left\{ \int_0^{2x-x^2} x\,dy \right\} dx \\
&= \int_0^2 \Big[xy \Big]_0^{2x-x^2} dx \\
&= \int_0^2 x(2x - x^2)\,dx \\
&= \int_0^2 (2x^2 - x^3)\,dx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 \\
&= \frac{2}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{4} \cdot 2^4 \\
&= \frac{16}{3} - 4 = \boldsymbol{\frac{4}{3}}
\end{aligned}
$$

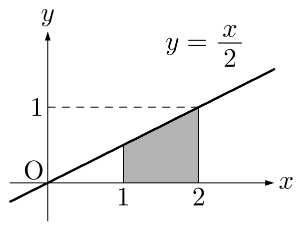
（2） 領域を図示すると



よって

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{3y} \sqrt{x+y}\,dx \right\} dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{3y} dy \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 \left\{ (4y)^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} \right\} dy \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 \left(4^{\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} \right) dy \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 \left(8y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} \right) dy \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 7y^{\frac{3}{2}}\,dy \\
&= \frac{14}{3} \left[\frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\
&= \frac{14}{3} \left[\frac{2}{5} \sqrt{y^5} \right]_0^1 \\
&= \frac{14}{3} \cdot \frac{2}{5} = \boldsymbol{\frac{28}{15}}
\end{aligned}
$$

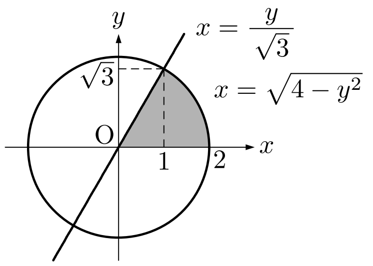
（3） 領域を図示すると



よって

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_1^2 \left\{ \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\,dy \right\} dx \\
&= \int_1^2 x \left[\sin^{-1} \frac{y}{x} \right]_0^{\frac{x}{2}} dx \quad (x > 0 \text{ より}) \\
&= \int_1^2 x \left(\sin^{-1} \frac{1}{2} - \sin^{-1} 0 \right) dx \\
&= \int_1^2 x \cdot \frac{\pi}{6}\,dx \\
&= \frac{\pi}{6} \int_1^2 x\,dx \\
&= \frac{\pi}{6} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 \\
&= \frac{\pi}{12}(2^2 - 1^2) \\
&= \frac{\pi}{12} \cdot 3 = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}
$$

2.　領域を図示すると



直線と円の交点を求めると

$x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 4$

$4x^2 = 4$

$x^2 = 1$ より，$x = \pm 1$

$x \geqq 0$ における交点の座標は，$(1,\ \sqrt{3})$

また，$y = \sqrt{3}x$ より，$x = \dfrac{y}{\sqrt{3}}$

$x^2 + y^2 = 4,\ x \geqq 0$ より，$x = \sqrt{4-y^2}$

よって，領域は，次の不等式で表される．

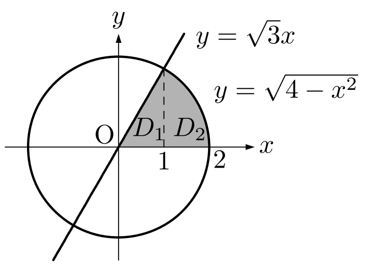
$0 \leqq y \leqq \sqrt{3},\quad \dfrac{y}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq \sqrt{4-y^2}$

したがって

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^{\sqrt{3}} \left\{ \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx \right\} dy \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left\{ (4-y^2) - \frac{y^2}{3} \right\} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left(4 - \frac{4}{3}y^2 \right) dy \\
&= \frac{1}{2}\left[4y - \frac{4}{9}y^3 \right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2}\left(4\sqrt{3} - \frac{4}{9}\cdot 3\sqrt{3} \right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\sqrt{3} = \boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

〔別解〕

図のように，領域 D を 2 つの領域 $D_1,\ D_2$ に分けると



$x^2 + y^2 = 4,\ y \geqq 0$ より，$y = \sqrt{4-x^2}$ であるから

$D_1 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x \right\}$

$D_2 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{4-x^2} \right\}$

したがって

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \iint_{D_1} x\,dxdy + \iint_{D_2} x\,dxdy \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{3}x} x\,dy \right\} dx \\
&\qquad + \int_1^2 \left\{ \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x\,dy \right\} dx \\
&= \int_0^1 \Big[xy \Big]_0^{\sqrt{3}x} dx + \int_1^2 \Big[xy \Big]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3}\int_0^1 x^2\,dx &= \sqrt{3}\left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\
&= \sqrt{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdots ①
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$ において，$4 - x^2 = t$ とおくと，$-2x\,dx = dt$ であるから，$x\,dx = -\dfrac{1}{2}\,dt$，また，$x$ と t の対応は

x	$1 \to 2$
t	$3 \to 0$

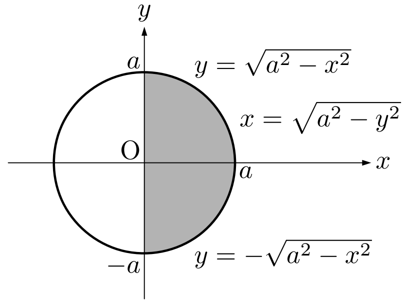
よって

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_3^0 \sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\,dt \right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^3 t^{\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 \\
&= \frac{1}{3}\Big[t\sqrt{t} \Big]_0^3 \\
&= \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdots ②
\end{aligned}
$$

①，②より，与式 $= \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}\sqrt{3}}$

※ こちらの方が計算が大変ですね….

3.　領域は，$-a \leqq y \leqq a,\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{a^2-y^2}$ であるから，これを図示すると



$x=\sqrt{a^2-y^2}$ より，$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$

よって，領域は次の不等式によって表すことができる．

$0 \leqq x \leqq a,\ -\sqrt{a^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{a^2-x^2}$

したがって

$$\text{与式} = \boldsymbol{\int_0^a \left\{ \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,\ y)\,dy \right\} dx}$$

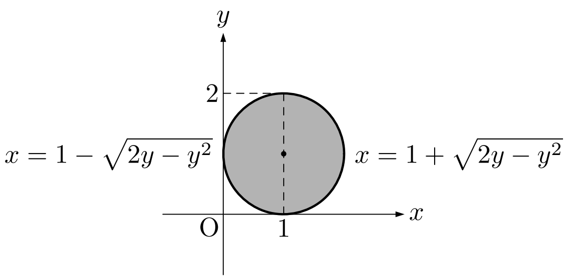
4. $x^2+y^2 \leqq 2x+2y-1$ より

$x^2-2x+y^2-2y \leqq -1$

$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1 \leqq -1$

$(x-1)^2+(y-1)^2 \leqq 1$

領域を図示すると



$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ より

$(x-1)^2=1-(y-1)^2$

$(x-1)^2=1-(y^2-2y+1)$

$(x-1)^2=2y-y^2$

$x-1=\pm\sqrt{2y-y^2}$

よって，$x=1\pm\sqrt{2y-y^2}$ であるから，領域は次の不等式によって表すことができる．

$0 \leqq y \leqq 2,\ 1-\sqrt{2y-y^2} \leqq x \leqq 1+\sqrt{2y-y^2}$

したがって

$$\text{与式} = \int_0^2 \left\{ \int_{1-\sqrt{2y-y^2}}^{1+\sqrt{2y-y^2}} (xy-y)\,dx \right\} dy$$

簡単のため，$\sqrt{2y-y^2}=\alpha$とおく．

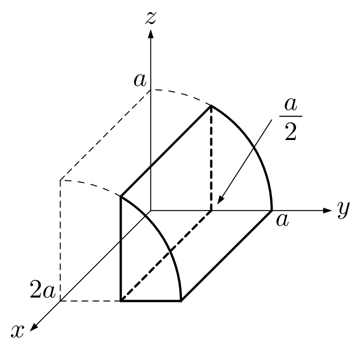
$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}yx^2-yx \right]_{1-\alpha}^{1+\alpha} dy$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}y\{(1+\alpha)^2-(1-\alpha)^2\} -y\{(1+\alpha)-(1-\alpha)\} \right] dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}y\cdot 4\alpha - y\cdot 2\alpha \right) dy$$

$$= \int_0^2 0\,dy = \mathbf{0}$$

5.



領域は，$0 \leqq x \leqq 2a,\ \dfrac{a}{2} \leqq y \leqq a$ であるから，求める体積を V とすると

$$V = \int_0^{2a} \left\{ \int_{\frac{a}{2}}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\,dy \right\} dx$$

$$= \int_0^{2a} \left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{a^2-y^2} + a^2\sin^{-1}\frac{y}{a} \right) \right]_{\frac{a}{2}}^{a} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2a} \left\{ a^2\sin^{-1}1 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}} + a^2\sin^{-1}\frac{1}{2} \right) \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2a} \left\{ a^2\cdot\frac{\pi}{2} - \left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{4}a^2} + a^2\cdot\frac{\pi}{6} \right) \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2a} \left(\frac{\pi}{2}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\pi}{6}a^2 \right) dx$$

$(a>0$ より$)$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2a} \left(\frac{\pi}{3}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \right) \int_0^{2a} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \right) \Big[\ x\ \Big]_0^{2a}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \right)\cdot 2a$$

$$= \frac{\pi}{3}a^3 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{12}a^3(4\pi-3\sqrt{3})}$$

※ $\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\,dy$ の求め方の別解

$y=a\sin\theta$ とおくと，$dy=a\cos\theta d\theta$

また，y と θ の対応は

y	$\frac{a}{2}$	$\to$	a
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

よって

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\cdot a\cos\theta d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\cos\theta d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{a^2\cos^2\theta}\cos\theta d\theta$$

ここで，$a>0$，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で，$\cos\theta>0$ であるから，$\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$

よって

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy = a^2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= a^2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{a^2}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$= \frac{a^2}{24}(4\pi-3\sqrt{3})$$

以下略

∎